5. Diofantske jednadžbe

**1.** Objasni pojam diofantske jednadžbe. Daj neke primjere diofantskih jednadžbi (osim ax + by = c).

Diofantske jednadžbe su algebarske jednadžbe čija se rješenja traže u skupu cijelih brojeva.

Primjeri:

a) Pellova jednadžba (**d** zadani prirodni broj, **x** i **y** cjelobrojne nepoznanice),

b) (rješenja su Pitagorini trojci ),

c) za zadani (veže se uz veliki Fermatov teorem koji kaže da za ova jednadžba nema rješenja).

**2.** Citiraj i dokaži teorem o rješivosti diofantske jednadžbe ax + by = c. Daj primjere.

Propozicija: Neka su zadani cijeli brojevi. Diofantska jednadžba ima rješenje onda i samo onda ako .

Dokaz: Ako postoji cjelobrojno rješenje jednadžbe , onda dijeli lijevu stranu od , dakle i desnu. Obratno, pretpostavimo da , tj. postoji tako da je . Jednadžba ima cjelobrojno rješenje prema Bezoutovom teoremu. Množenjem sa k dobivamo , pa slijedi da je , rješenje jednadžbe

Primjeri:

a) Jednadžba nema cjelobrojnih rješenja jer ne dijeli 13,

b) Jednadžba ima rješenja.

6. Kombinatorika

**1.** Pravilo zbrajanja za konačne disjunktne skupove. Produktno pravilo (citiraj i dokaži teorem).

Ako su konačni skupovi A i B disjunktni, onda vrijedi .

Propozicija: (Potrebna za sljedeći teorem, ne treba je dokazivat u testu) Neka su konačni skupovi. Onda vrijedi .

Dokaz: Da bi prebrojili koliko ima poredanih dvojaca, učvrstimo element . Onda je broj elemenata oblika isti kao i broj elemenata , dakle Kako je broj dvojaca isti za svaki , onda je ukupan broj dvojaca jednak .

Teorem: (Produktno pravilo) Neka su neprazni skupovi s konačno mnogo elemenata. Onda je:

Dokaz: Rabimo matematičku indukciju po **n**. Za tvrdnja je istinita: (baza indukcije). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj **n** (induktivna pretpostavka). Dokažimo da onda vrijedi i za , tj. (induktivni korak). Očevidno Kartezijev produkt možemo poistovjetiti s Kartezijevim produktom dvaju skupova , tj. sa . Dakle, svaki poredani n+1-terac možemo poistovjetiti sa poredanim dvojcem elemenata iz i iz . Prema prethodnoj propoziciji je . Tvrdnja slijedi odmah iz induktivne pretpostavke, jer je onda izraz na desnoj strani jednak .

**2.** Koliki su i za konačne skupove A, B i X? Citiraj i dokaži svaku pojedinu tvrdnju.

Teorem: Neka su A i B konačni skupovi. Onda vrijedi .

Dokaz: Neka je dotično . Prema produktnom pravilu skup ima elemenata. Prema tome, tvrdnja će biti dokazana ako pokažemo da skupovi i imaju isti broj elemenata, tj. ako konstruiramo bijekciju . Dovoljno je za (tj. ) definirati

. Da je injekcija, to je jasno, jer ako su i , onda za sve

Surjektivnost je također jasna: odaberimo bilo koji element . Onda možemo definirati funkciju sa . Dakle .

Teorem: Neka je konačan skup. Onda vrijedi.

Dokaz: Neka je . Dokažimo da postoji bijekcija iz partitivnog skupa na skup svih poredanih n-teraca nula i jednica. Definirajmo *kodiranjem* podskupa skupa na sljedeći način. Ako je stavljamo Ako je , onda neka je n-terac u kojem jedinice dolaze na na k-tom mjestu n-terca onda i samo onda ako je (a inače je nula). Vrijednost je n-terac koji predstavlja skupa .

Funkcija je očevidno injektivna, jer ako su onda je . Funkcija je surjekcija jer za svaki n-terac iz možemo očitati skup koji je n-tercem kodiran (ako je na k-tom mjestu jedinica, onda je , a ako je nula onda ).

Kako je bijekcija, onda je: gdje smo u predzadnjoj jednakosti rabili produktno pravilo.

**3.** Koliko ima različitih Booleovih funkcija od n varijabla (citiraj i dokaži tvrdnju)?

Propozicija: Neka je zadan prirodan broj **n**. Kardinalni broj skupa Booleovih funkcija , gdje je jednak je .

Dokaz: Tražimo zapravo , gdje je . Zbog produktnog pravila je . Iz teorema 5 dobivamo da je .

**4.** Što su to varijacije bez ponavljanja, a što permutacije bez ponavljanja? Kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži svaku pojedinu tvrdnju)?

**Varijacijom bez ponavljanja** reda **k** n-članog skupa , , zovemo bilo koji poredani k-terac različitih elmenata iz .

**Permutacijom bez ponavljanja** n-članog skupa zovemo bilo koji poredani n-terac različitih elemenata iz . Svaku permutaciju možemo poistovjetiti sa nekom bijekcijom .

Teorem: Broj varijacija reda skupa od **n** elemenata,tj. broj poredanih k-teraca različitih elemenata iz n-članog skupa, jednak je

Ukupan broj permutacija bez ponavljanja n-članog skupa jednak je

Dokaz: Ako smo u nekom k-tercu na prvo mjesto stavili neki od elemenata, onda na drugo mjesto možemo staviti bilo koji od preostalih elemenata, na treće mjesto bilo koji od preostalih , itd. , na zadnje bilo koji od preostalih . Prema produktnom pravilu onda imamo ukupno varijacija bez ponavljanja reda k. Odavde za dobivamo odmah i broj permutacija.

**5.** Što su to kombinacije bez ponavljanja i kako ih prebrojavamo (binomni koeficijenti)? Citiraj i dokaži tvrdnju. Koja su svojstva binomnih koeficijenata?

**Kombinacija bez ponavljanja** reda **k** n-članog skupa , je bilo koji njegov k-člani podskup. Dakle kombinacija bez ponavljanja je samo drugi naziv za podskup skupa.

Teorem: Broj kombinacija bez ponavljanja reda k n-članog skupa, , jednak je

Dokaz: Prema teoremu o broju varijacija bez ponavljanja svih poredanih k-teraca ima . Neka je neki takav k-terac. Svaka od njegovih k! permutacija definira isti skup . To znači da skup od ukupno poredanih k-teraca možemo grupirati u množine od po k! varijacija od kojih svaka određuje isti skup. Dakle ukupan broj k-članih podskupova iznosi .

**6.** Koja su svojstva binomnih koeficijenata? (Dokaži pojedina svojstva)

Propozicija**:** (Svojstva binomnih koeficijenata) Vrijedi:

Dokaz:

**7.** Kako glasi binomna formula? Dokaži binomnu formulu (indukcijom, kombinatorički).

Propozicija: Za svaki vrijedi .

Dokaz: Tvrdnja se može dokazati indukcijom po **n**, pri čemu treba rabiti svojstva binomnih koeficijenata. Baza indukcije: Provjerimo tvrdnju za . Očito je

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki .

Korak indukcije: Dokažimo pomoću pretpostavke indukcije da tvrdnja vrijedi za .

**Napomena:** Izraz napisan u zagradi **[]** je napisan jedno ispod drugog, a u stvarnosti ide jedan do drugog. Ovo se napisalo tako zbog uštede prostora i preglednosti.

Kombinatorički dokaz: U izrazu će nakon množenja opći član imati oblik , gdje je  konstanta koju želimo odrediti. Produkt može se dobiti tako da uzmemo **k** elemenata **x** od **n** binoma u umnošku . Tih **k** elemenata možemo odabrati na bilo koji način među **n** binoma, dakle na načina. Element **y** se nakon toga uzima iz preostalih binoma tj. na način. Prema tome je .

**8.** Što su to permutacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži formulu)?

Zadan je skup od **k** elemenata . Promatrajmo sve *poredane* n-terce elmenata tog skupa u kojima se element pojavljuje puta, element pojavljuje puta itd., pri čemu je dakako

. Takve n-terce zovemo **permutacijama n-tog reda s ponavljanjem.**

Teorem: Broj permutacija n-tog reda s ponavljanjem skupa k-članog skupa , u kojima se element pojavljuje puta, , jednak je

Dokaz: Ukupan broj permutacija od elemenata jednak je n!. Među tim poredanim

n-tercima ima i jednakih, jer se npr. Element pojavljuje puta.

Gledajmo najprije kao da su svi od **n** elementa međusobno različiti (npr. Neka početni skup ima **k** elemenata i gledajmo elemenata , elemenata itd). Promatrajmo sve moguće permutacije n-članog skupa . Neka je skup svih permutacija skupa . Vrijedi Za permuatacije i iz X reći ćemo da su ekvivalentne i pisati , ako daju istu permutaciju s ponavljanjem. Lako se vidi da je relacija ekvivalencije na skupu svih permutacija. Različitim razredima ekvivalencije pripadaju različite permutacije, pa je traženi broj permutacija jednak upravo broju razreda ekvivalencije, tj. . Svakoj permutaciji početnog n-članog skupa odgovara razred ekvivalencije s istim brojem elemenata. Broj tih razreda je upravo broj koji tražimo, označimo ga s **r**. Produkt broja elemenata u pojedinom razredu i broja razreda jednak je ukupnom broju permutacija, tj. , odakle odmah slijedi tvdnja.

**9.** Citiraj i dokaži multinomnu formulu.

Teorem: Broj načina na koji u potenciji

možemo odabrati puta varijablu , puta varijablu ,..., puta varijablu , i to po jednu iz svakog od **n** faktora, , jednak je

To je upravo multinomni koeficijent uz u razvoju , tj.:

Zbrajamo po svim k-tercima cijelih brojeva takvima da je .

Dokaz: U izrazu će nakon množenja opći član imati oblik , gdje je  konstanta koju želimo odrediti. Produkt može se dobiti tako da uzmemo elemenata od **n** binoma u umnošku . Tih elemenata možemo odabrati na bilo koji način među **n** binoma, dakle na načina. Element se nakon toga može uzeti iz preostalih binoma na načina tj. na načina. Element se nakon toga može uzeti iz preostalih binoma na načina tj. na načina. Analogno za ostale. Napomenimo još da se lement može uzeti na načina iz preostalih binoma u umnošku tj. na načina. Dakle koeficijent je jednak . Primjetimo još da je u posljednjem binomnom koeficijentu izraz jednak

. Sada raspišimo izraz za :

Vidimo da možemo kratiti nazivnik prethodnog koeficijenta sa brojnikom sljedećeg pa nakon kraćenja „prežive“ samo izrazi u nazivnicima tj. i brojnik prvog binomnog koeficijenta ( ).

**10.** Što su to varijacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži formulu)?

**Varijacija s ponavljanjem** k-tog reda n-članog skupa je svaki *poredani* k-terac elemenata iz . Bilo koji element u k-tercu može se i ponavljati.

Teorem: Poredanih k-teraca n-članog skupa ima ukupno .

Dokaz: Skup svih varijacija s ponavljanjem jednak je (Kartezijev produkt k skupova). Prema produktnom pravilu vrijedi .

**11.** Što su to kombinacije s ponavljanjem i kako ih prebrojavamo (citiraj i dokaži formulu)?

Neka je . **Kombinacija s ponavljanjem** k-tog rada n-članog skupa je bilo koji *neporedani* k-terac elemenata iz . Članovi k-terca smogu se ponavljati.

Teorem: Broj kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa jednak je

Dokaz: Svaki element iz skupa u kombinaciji s ponavljanjem označit ćemo zvjezdicom. Da bismo znali točno o kojem je elementu riječ, koristit ćemo i pregrade. Odaberimo dakle k zvjezdica i pregradu (ukupno mjesta), između kojih ćemo stavljati zvjezdice. Broj ponavljanja zvjezdica odijeljenih susjednim pregradama odgovara kratnosti pripadnog elementa. Razmještaj k zvjezdica na bilo koje od mjesta može se obaviti na načina, jer toliko ima k-člnih podskupova od članog skupa.

**12.** Kako glasi formula uključivanja i isključivanja (Sylvesterova formula)? Citiraj i dokaži teorem.

Teorem: (Formula uključivanja i isključivanja ili Sylvesterova formula) Neka su konačni skupovi sadržani u . Onda vrijedi:

Dokaz:

(a) Rabit ćemo matematičku indukciju po **n**.

Baza indukcije: Za tvrdnja je:

Iz dobivamo i time je dokazana baza indukcije.

Pretpostavka i korak indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za **n**. Dokažimo da vrijedi za **n+1**. Najprije je

jer tvrdnja vrijedi za uniju dva skupa (tj. za ). Sada možemo iskoristiti induktivnu pretpostavku na dva izraza u zadnjem redu, jer se pojavljuju unije od n skupova:

(b) Iz DeMorganove formule:

**13.** Izvedi formulu za ukupan broj deranžmana u skupu svih permutacija bez ponavljanja reda n.

Označimo sa skup svih permutacija skupa Za bilo koji učvršćeni , , bit će zgodno uvesti skup koji sadrži sve permutacije kod kojih je i-ta komponenta fiksna (nepromijenjena), tj. . Drugim riječima, definiramo . Tada je ukupan broj deranžmana:

ukupan broj permutacija n-članog skupa). Odaberimo bilo koji k-člani podskup . Broj predstavlja broj permutacija kod kojih je za sve . Kako su za svaki komponente fiksne, preostaje nam slobodnih komponenata za permutiranje. Pripadnih permutacija ima Budući da imamo načina odabira k položaja od **n** mogućih, onda je broj svih permutacija s barem **k** fiksnih komponenata jednak:

Prema Sylvesterevoj formuli dobivamo da je broj deranžmana jednak:

7. Rekurzivne relacije

**1.** Kako definiramo Fibonaccijev slijed ?Izvedi zatvorenu formulu (Moivreovu) za .

Fibonaccijev niz definira se početnim vrijednostima i i rekurzivnom relacijom:

Propozicija: Za Fibonaccijev niz vrijedi "zatvorena formula":

Dokaz: Zanemarivši na trenutak početne vrijednosti i , pokušajmo potražiti rješenje Fibonaccijeve relacije , u obliku (tzv. Eulerova supstitucija). Onda je . Pretpostavimo da je . Slijed je rješenje rekurzivne relacije onda i samo onda ako je , tj. . Prema tome su

rješenja rekurzivne relacije . lako se vidi da je onda i linearna kombinacija

također rješenje za bilo koje . Odredimo tako da budu ispunjeni početni uvjeti i

Početni uvjeti daju sustav , , čijim rješavanjem dobivamo .

**2.** Zlatni prerez i veza s Fibonaccijevim slijedom.

Za dužinu duljine sastavljenu od dvije dužine, od kojih je veći dio duljine **v** i manji dio duljine **m**, kažemo da je podijeljena po zlatnom prerezu ako je omjer duljine većeg i manjeg dijela jednak omjeru duljine cijeli dužine prema većem dijelu. Drugim riječima . Za je onda , dotično , dakle

Za Fibonaccijev niz vrijedi Taj broj zove se zlatni prerez.

Zaključak: Omjer dvaju uzastopnih članova Fibonnacijeva niza je jednak zlatnom prerezu.

**3.** Što su linearne rekurzivne relacije (homogene i nehomogene)? Što je Eulerova supstitucija i kako glasi karakteristična jednadžba pridružena linearnoj rekurzivnoj relaciji?

Opći oblik linearne rekurzivne relacije reda **r** je:

gdje su zadani realni (ili kompleksni) koeficijenti, , a je zadana funkcija koja prirodnim brojevima pridružuje realne (ili kompleksne) brojeve. Nepoznanica u rekurzivnoj relaciji je slijed . n-ti član slijeda je određen s vrijednostima **r** prethodnih članova: ,tj. rekurzivno. Ako je zadano **r** početnih vrijednosti , onda s pomoću možemo izračunati redom sve daljnje članove slijeda , dakle sve .

Za rekurzivnu relaciju kažemo da je homogena ako je za sve n. Dakle imamo

Do općeg rješenja rekurzivne relacije ćemo doći tako da najprije potražimo rješenje u jednom vrlo specijalnom obliku, s pomoću Eulerove supstitucije: .

Karakteristična jednadžba rekurzivne relacije glasi: .

**4.** Opće rješenje homogene linearne rekurzivne relacije (citiraj i dokaži teorem za slučaj kad postoje samo jednostruki korijeni karakteristične jednadžbe, citiraj teorem za slučaj kada postoje i višestruki korijeni).

Teorem: Neka su karakteristični korijeni i pretpostavimo da su svi međusobno različiti. Onda je opće rješenje homogene rekurzivne jednadžbe jednako linearnoj kombinaciji

gdje su ,…, bilo koji kompleksni koeficijenti.

Dokaz: Neka je neko rješenje od Slijed je potpuno određen jednadžbom i sa **r** svojih početnih vrijednosti koje su unaprijed zadani kompleksni brojevi. Znamo da zadan sa ispunjava rekurzivnu relaciju za sve . Treba još samo vidjeti da je moguće pronaći koeficijente ,…, tako da budu ispunjeni i početni uvjeti za :

To je linearni sustav **r** jednadžbi s **r** nepoznanica ,…,. Determinanta tog sustava je Vandermondeova determinanta:

Kako su svi korijeni međusobno različiti, onda je i determinanta sustava . Prema tome sustav je jednoznačno rješiv po ,…,.

Teorem: Neka su svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe homogene rekurzivne relacije odgovarajućih kratnosti . Rješenje od koje odgovara korijenu kratnosti , je linearna kombinacija sljedećih sljedova : , , …,. Drugim riječima

pri čemu su ,…, kompleksni koeficijenti. Opće rješenje, u kojem je ukupno slobodnih koeficijenata, dobiva se kao .

**5.** Što je to partikularno rješenje nehomogene linearne rekurzivne relacije i kako tražimo opće rješenje? (Citiraj i dokaži formulu za opće rješenje.)

Partikularno rješenje nehomogene linearne rekurzivne relacije je funkcija koja se pretpostavlja u određenom obliku s obzirom na . Koeficijenti partikularnog rješenja određuju se na način da se početni uvjeti uvrste u zadanu relaciju u kojoj smo članove zamijenili s odgovarajućim partikularnim rješenjem.

Propozicija: Neka je opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije Pretpostavimo da znamo neko partikularno rješenje od Onda je opće rješenje nehomogene jednadžbe zbroj općeg rješenja homogene rekurzivne relacije i partikularnog rješenja od

Dokaz: Slijed zadan sa je rješenje nehomogene rekurzivne relacije zbog svojstva linearnosti: budući da slijed ispunjava homogenu rekurzivnu relaciju i nehomogenu, onda zbrajanjem dobivamo da ispunjava nehomogenu relaciju

Dokažimo da se svako rješenje od može napisati u obliku Neka je neko rješenje od Istu relaciju ispunjava i partikularno rješenje , pa oduzimanjem dobivamo da ispunjava homogenu rekurzivnu relaciju Kako je svako njeno rješenje oblika , onda je , odakle slijedi .

**Podsjetnik:**

**6.** Hanojske kule i slični primjeri.

Hanojske kule: Imamo **n** kolutova s rupom u sredini, svi različitih polumjera i na ravnoj podlozi zabodena **tri** štapića. Svi kolutovi su nanizani na jedan štapić tako da je kolut s većim polumjerom uvijek ispod onog s manjim polumjerom. Cilj je prenijeti sve kolutove (jedan po jedan) na treći štapić tako da ni u jednom trenutku ne bude onaj s većim polumjerom iznad onog s manjim. Pri tome svaki od štapića možemo koristiti za privremeno smještanje kolutova. Pitanje koje se postavlja jest: „Koliki je najmanji broj prijenosa an potreban da se svih n kolutova prenese s prvog na treći štapić?“

Rekurzivna relacija koja opisuje ovaj slučaj jest: Rješenje je: .

Slični slučajevi: Ako se ovo pitanje i pojavi u testu (što je malo vjerojatno) preporuča se rješavanje neke lagane rekurzivne relacije koju treba ranije riješiti radi provjere rješenja.